Primera práctica calificada MATEMÁTICA III (2015-2)

Miguel Pajuelo Villanueva[1], Moises Vera Chinchay[2]

[1−2]Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (FIEE)
Universidad Nacional de Ingeniería PER

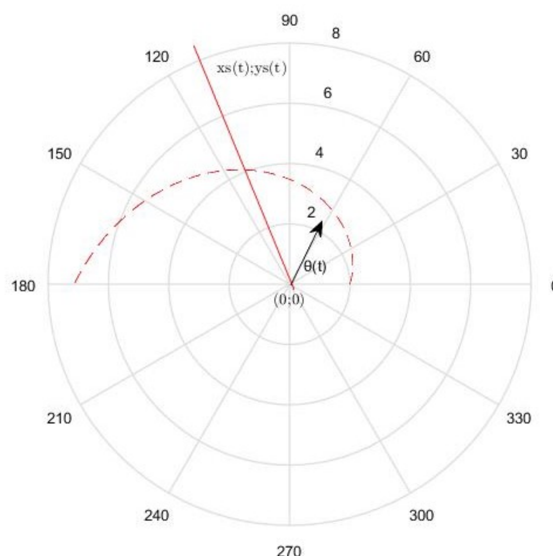
8 de octubre de 2015

1. En una línea recta l, se ubican los puntos A fijo y otro punto variable M. Sea el punto P, un punto tal que el triángulo APM es isóceles $\overline{PA} \cong \overline{PM}$. Si el punto P varía tal que la longitud del radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo APM sea constante, entonces determine la ecuación vectorial del lugar geométrico que describe el circuncentro O y el ortocentro H del triángulo APM.
   SOLUCIÓN

2. Un destructor trata de cazar a un submarino en medio de una niebla densa, la niebla se levanta durante un instante y se observa que el submarino se encuentra en la superficie a 3 millas de distancia,y la niebla vuelve a cerrarse. La rapidez del destructor es el doble que la del submarino y además el submarino se sumergirá inmediatamente y avanzará a toda rapidez en línea recta en una dirección desconocida. Halle la ecuación vectorial de la trayectoria que seguirá el destructor para estar seguro de pasar sobre el submarino.
   SOLUCIÓN

   Trabajemos en coordenadas polares, Sea s: submarino y D: destructor.

   El destructor avanzó hacia donde vió a s. Si s hubiera avanzado hacia D, entonces



D estaría sobre S en un tiempo t_o

$vt_o + 2vt_o = 3 \rightarrow t_o = \dfrac{1}{v_o}$

Hacemos:

$S : (x_S(t); y_S(t)) \equiv (R_S(t); \theta_o)$

$D : (x_D(t); y_D(t)) \equiv (R_D(t); \theta_t)$ Donde: θ_o : ángulo que forma el escape de S.

$R_s(t) = vt$ (distancia recorrida)

Para que D pase sobre S, $R_D(t) = R_S(t) = vt$

$\forall t > \dfrac{1}{v}$ (Si $t = \dfrac{1}{v}$; $R_D(t) = R_S(t) = 1$)

$\longrightarrow x_D(t) = vtcos\theta(t)$ y $y_D(t) = vtsen\theta(t)$

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = v_D^2 = 4v^2$

$v^2(cos^2\theta(t) + t^2sen^2\theta(\theta'(t))^2 + sen^2\theta(t) + t^2cos^2\theta(t)(\theta')^2) = 4v^2$

Queda $\theta'(t) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{t} \Rightarrow \theta = \pm\sqrt{3}lnt + \mathbb{C}$

Como $\theta(\dfrac{1}{v}) = 0$

$\mathbb{C} = \mp\sqrt{3}ln(\dfrac{1}{v})$

$\theta(t) = \pm\sqrt{3}ln(vt)$ y $R(t) = vt$

$vt = e^{\pm\frac{\theta}{\sqrt{3}}} \qquad \Rightarrow R(\theta) = e^{\pm\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}}$

D avanza 2 millas hacia S y luego sigue una espiral de la forma $R(\theta) = e^{\pm\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}}$

3. Sea la curva suave ς descrita por la transformación $\overrightarrow{r} :< 0; \infty > \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

   $\overrightarrow{r}(t) = (\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}; \dfrac{2at}{1+t^2}; 2btan^{-}1(t))$

   Determine la ecuación vectorial de la involuta de la curva suave ς

   SOLUCIÓN

   $t = tan(\dfrac{u}{2})$

   $\overrightarrow{r}_{(u)} = (acosu; asenu; bu) \qquad \overrightarrow{r}'_{(u)} = (-asenu; acosu, b)$

   $s_{(u)} = \int_0^u \|\overrightarrow{r}'_{(u)}\| \cdot du$

   $\int_0^u \sqrt{a^2+b^2)} \cdot du$

   $S_{(u)} = \sqrt{a^2+b^2}u$

   $u = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   $\overrightarrow{r}_{(s)} = (acos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}); asen(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}); \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}})$

   $\overrightarrow{r}'_{(s)} = (-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; cos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}); \dfrac{acos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})}{\sqrt{a^2+b^2}})$

   $\overrightarrow{r}*_{(s)} = \overrightarrow{r}_{(s)} + (c-s)\overrightarrow{t}_{(s)}$

   $$\overrightarrow{r}*_{(s)} = (acos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})); asen(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}); \dfrac{acos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}})+$$
   $$(c-s)(-\dfrac{acos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}; \dfrac{acos(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})}{\sqrt{a^2+b^2}}; \dfrac{b}{a^2+b^2})$$

4. Sea ς la curva descrita por $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$, siendo s el parámetro longitud de arco. La curva ς tiene las longitudes características:

- Sus tangentes determinan un ángulo de medida constante igual a $\frac{\pi}{4}$ con el eje z.
- Su proyección sobre el plano $z = 13$, es la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 4; z = 13$

Se define ς_1 como la curva suave descrita por:

$$\overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{r}_1(s_1) = a\overrightarrow{r}(s) + \overrightarrow{T}(s)$$

Siendo a una contante. Calcule la curvatura $k_1(s_1)$ de función de a de la curva suave ς_1 de un punto genérico de ella.

SOLUCIÓN

Ya que su proyección en un plano paralelo a XY es un círculo y sus tangente al eje z es

constante podemos inferir que se trata de una hélice circular.

$\overrightarrow{r} = (acost; asent; bt)$

De la proyección en z=13; $x^2 + y\ 2 = 4$

$(acost_o)^2 + (asent_o)^2 = 4 \qquad \Rightarrow 2a^2 = 4; \quad a = \sqrt{2}$

Ahora sabemos que el ángulo que forma con el eje z es $\frac{\pi}{4}$

entonces llamamos a $\overrightarrow{z}$: vector unitario del eje Z.

$\overrightarrow{z} = (0, 0, 1)$

El ángulo de estos vectores lo calculamos mediante producto escalar.

$cos\theta = \frac{\overrightarrow{r}'\overrightarrow{z}}{\|\overrightarrow{r}'\|\|\overrightarrow{z}\|} = \frac{(-asent; acost; b)(0; 0; 1)}{\sqrt{(a^2 + b^2)(1)}} = cos(\frac{\pi}{4})$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ como $a = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow b = \sqrt{2}$

Ahora: $\overrightarrow{r} = (\sqrt{2}cost; \sqrt{2}sent; \sqrt{2}t)$

Reparametrizando: $s = \int_0^t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot dt \qquad s = 2t$

$\overrightarrow{r}_{(s)} = (\sqrt{2}cos(\frac{s}{2}); \sqrt{2}sen(\frac{s}{2}); \frac{2}{2}s)$

Sabemos que: $\overrightarrow{r}_{1(s_1)} = a\overrightarrow{r}_s + \overrightarrow{T}_s$

Reemplazando: $\overrightarrow{r}_1 = \sqrt{2}(\sqrt{2}cos\frac{s}{2}; \sqrt{2}\frac{s}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}s) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-sen\frac{s}{2}; cos\frac{s}{2}; 1)$

$\overrightarrow{r}_1 = (2cos\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}sen\frac{s}{2}; 2sen\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}cos\frac{s}{2}; s + \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\overrightarrow{r}'_1 = \overrightarrow{T} = (-\frac{\sqrt{2}cos\frac{s}{2}}{4} - sen\frac{s}{2}; cos\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{2}sen\frac{s}{2}}{4}; 1)$

Sabemos que: $\overrightarrow{T}' = \kappa\overrightarrow{N}$

Hallamos $\overrightarrow{N}$

$\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{T}'}{\|\overrightarrow{T}'\|}$

En un punto genérico: $t = 0 \Rightarrow s = 0$

$\overrightarrow{T} = (-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{8}; 0) \qquad \Rightarrow \|\overrightarrow{T}'\| = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

$\overrightarrow{N} = \frac{8}{3\sqrt{2}}(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{8}; 0)$

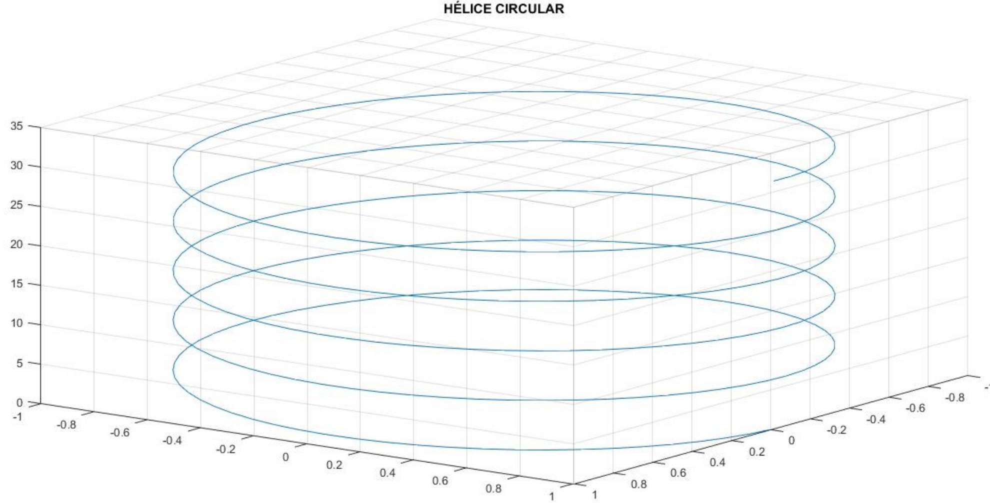
Ahora: $\overrightarrow{T}' = \kappa\overrightarrow{N}$

$(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{8}; 0) = \kappa(-\frac{4}{3\sqrt{2}}; -\frac{1}{3}; 0)$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{64} = \kappa^2(\frac{16}{18} + \frac{1}{9})$

$\dfrac{9}{32} = \kappa^2 \qquad \Rightarrow \kappa = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

5. Sea ς una hélice circular y ς_1 es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la hélice circular. Si k es la curvatura de la hélice, entonces el producto de las torsiones de la curvas ς y ς_1
SOLUCIÓN



Sea $\overrightarrow{r}$ la posición de la hélice en un tiempo t.

$\overrightarrow{r} = (acost; asent; bt)$

Hallamos su curvatura: $\qquad k = \dfrac{\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''\|}{\|(\overrightarrow{r}')^3\|}$

$\overrightarrow{r}' = (-asent; acost; b)$

$\overrightarrow{r}'' = (-acost; -asent; 0)$

Reemplazando $k = \dfrac{\|(absent; -abcost; a^2)\|}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} \qquad k = \dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}$

$k = \dfrac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow \rho = \dfrac{1}{k} = \dfrac{a^2+b^2}{a}$

Ahora sea: ς_1 la curva descrita por los centros de curvatura de la hélice

Está definida por: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{r} + \rho\overrightarrow{n}$

Hallamos la normal de la hélice

$\overrightarrow{r}' = \|\overrightarrow{r}'\|\overrightarrow{t}$

$(8 - asent; acost; b) = \sqrt{a^2+b^2}\,\overrightarrow{t} \Rightarrow \overrightarrow{t} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-asent; acost; b)$

$\overrightarrow{t} = \|\overrightarrow{t}'\|\overrightarrow{n}$

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-acost; -asent; 0) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}a\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{n} = (-cost; -sent; 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{c} = (acost; asent; bt) + \dfrac{a^2+b^2}{a}(-cost; -sent; 0)$

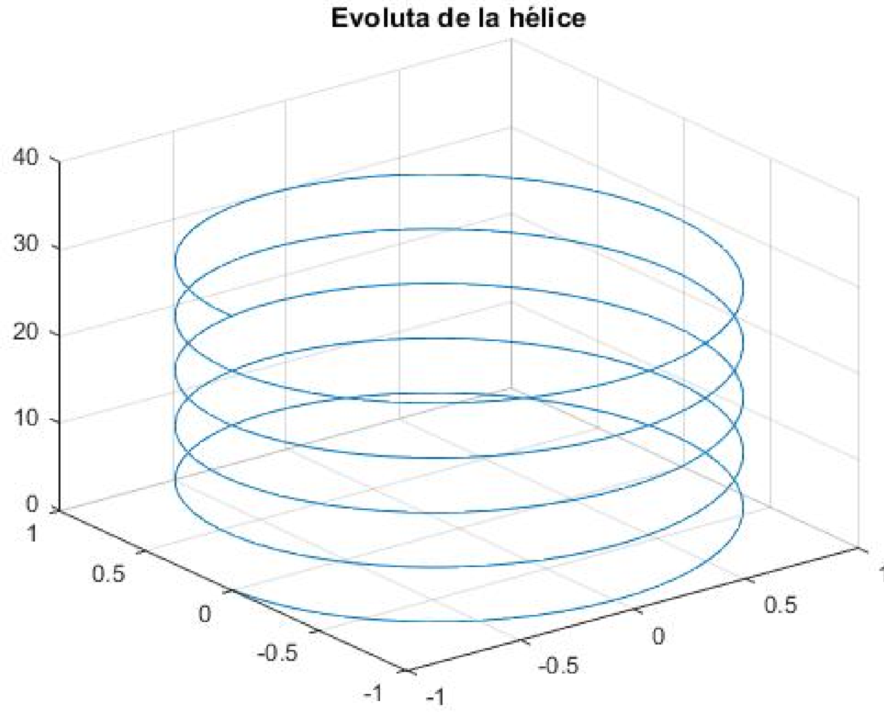
$\overrightarrow{c} = (acost - \dfrac{a^2+b^2}{a}cost; asent - \dfrac{a^2+b^2}{a}sent; bt)$

$\rightarrow \overrightarrow{c} = (-b^2cost; -b^2sent; bt)$

Ahora, hallamos las torsiones: Sea τ: torsión de ς y τ_1: torsión de ς_1

$\tau = \dfrac{(\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}'')\overrightarrow{r}'''}{\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''\|}$

$\overrightarrow{r} = (acost; asent; bt)$



$\overrightarrow{r}' = (-asent; acost; b)$
$\overrightarrow{r}'' = (-acost; -asent; 0)$
$\overrightarrow{r}''' = (asent; -acost; 0)$

$$\tau = \frac{(absent; -abcost; a^2)(asent; -acost; 0)}{a^2(a^2+b^2)}$$

$$\tau = \frac{a^2bsen^2(t) + a^2bcos^2(t)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)} \qquad \Rightarrow \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Para ς_1 :

$$\tau_1 = \frac{(\overrightarrow{c}' \times \overrightarrow{c}'')\overrightarrow{c}'''}{\|\overrightarrow{c}' \times \overrightarrow{c}''\|}$$

$\overrightarrow{c} = (-b^2cost; -b^2sent; bt)$
$\overrightarrow{c}' = (b^2sent; -b^2cost; b)$
$\overrightarrow{c}'' = (b^2cost; b^2sent; 1)$
$\overrightarrow{c}''' = (-b^2sent; b^2cost; 0)$

$$\tau_1 = \frac{(-b^2cost - b^3sent; b^3cost - b^2sent; b^4)(-b^2sent; b^2cost; 0)}{b^4(b^4+b^2+1)}$$

$$\tau_1 = \frac{b^4sentcost + b^5sen^2(t) + b^5cos^2(t) - b^4sentcost}{b^4(b^4+b^2+1)}$$

$$\rightarrow \tau_1 = \frac{1}{b^4(b^4+b^2+1)}$$

Piden $\tau \times \tau_1 = (\frac{b}{a^2+b^2})(\frac{1}{b^4(b^4+b^2+1)})$

$$\Rightarrow \tau \times \tau_1 = \frac{1}{(a^2+b^2)(b^3)(b^4+b^2+1)}$$

6. Una partícula se desplaza a lo largo de una curva plana con rapidez constante igual a 2, el movimiento empieza en el origen cuando t=0 y el vector velocidad inicial es $(2; 0)$. En cada instante la curvatura de la curva es $4t$. Si la curva nunca está debajo del eje X,

calcule el vector velocidad cuando $t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

SOLUCIÓN

$\|\overrightarrow{r}'\| = 2 \qquad v_o = \|(r_o)'\| = 2 \qquad k = 4t$

$k_{(s)} = \dfrac{dQ}{dS}$

$s = \int_0^t \|\overrightarrow{r}'\| \cdot dt$

$s = \int_0^t 2 \cdot dt$

$s = 2\int_0^t \cdot dt$

$s' = 2t$

$\dfrac{ds}{dt} = 2 \qquad ds = 2dt$

Integrando obtenenmos: $\qquad s = 2t \qquad \rightarrow k = 2s$

Hallando Q:

$k_{(s)} = \dfrac{dQ}{dS}$

$2s = \dfrac{dQ}{dS}$

$\int_0^s 2s \cdot ds = \int_0^Q \cdot dQ \qquad s^2 = Q$

De: $x - x_0 = \int_0^s cosQ \cdot ds \qquad x' = cosQ\dfrac{ds}{dt}$

Igualmente para y: $y - y_0 = \int_0^s senQ \cdot ds \qquad y' = senQ\dfrac{ds}{dt}$

Pero: $Q = s^2$

$\Rightarrow x' = cos(s^2)\dfrac{ds}{dt} \qquad ... \qquad (1)$

$\Rightarrow y' = sen(s^2)\dfrac{ds}{dt} \qquad ... \qquad (2)$

Pero: $s = 2t$

En (1) y (2)

$x' = cos(4t^2)\dfrac{ds}{dt}$

$y' = sen(4t^2)\dfrac{ds}{dt}$

$\overrightarrow{r}' = (2cos(4t)); 2sen(4t))$

$\Rightarrow \overrightarrow{r}'_{(\frac{\sqrt{\Pi}}{4})} = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

7. Demuestre que $v^2 = \mathbb{GM}(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a})$ en cualquier punto de una órbita elíptica.

Si $r = \|\overrightarrow{r}\|$ v; velocidad y a es la longitud del semieje mayor de la órbita.

SOLUCIÓN

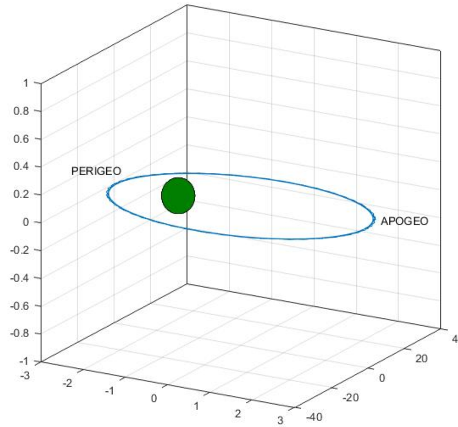
En los casos específicos de una órbita elíptica o circular , la ecuación puede derivarse fácilmente a partir de la conservación de energía y momento. Energía total específico es constante a lo largo de la órbita . Por lo tanto, el uso de los subíndices a y p para denotar apogeo y perigeo, respectivamente.

$0 < \varepsilon < 1$

$\varepsilon = \dfrac{\overrightarrow{v}_a^2}{2} - \dfrac{\mathbb{GM}}{r_a} = \dfrac{\overrightarrow{v}_p^2}{2} - \dfrac{\mathbb{GM}}{r_p}$

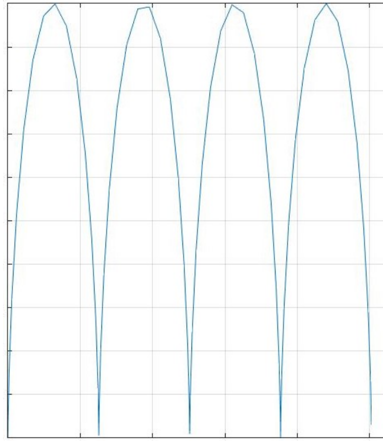
$\dfrac{\overrightarrow{v}_a^2}{2} - \dfrac{\overrightarrow{v}_p^2}{2} = \dfrac{\mathbb{GM}}{r_a} - \dfrac{\mathbb{GM}}{r_p}$

Recordando que para una órbita elíptica (y por lo tanto también una órbita



circular) los vectores de velocidad y radio son perpendiculares al apogeo y perigeo,la conservación del momento angular requiere:
$h = r_a \overrightarrow{v}_a = r_p \overrightarrow{v}_p \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v}_p = \frac{r_a}{r_p}\overrightarrow{v}_a$
$\frac{1}{2}(1 - \frac{r_a^2}{r_p^2})\overrightarrow{v}_a^2 = \frac{\mathbb{GM}}{r_a} - \frac{\mathbb{GM}}{r_p}$
$\frac{1}{2}\frac{r_p^2 - r_a^2}{r_p^2}\overrightarrow{v}_a^2 = \frac{\mathbb{GM}}{r_a} - \frac{\mathbb{GM}}{r_p}$
Aislando la energía cinética en el apogeo y simplificando:
$\frac{1}{2}\overrightarrow{v}_a^2 = (\frac{\mathbb{GM}}{r_a} - \frac{\mathbb{GM}}{r_p})(\frac{r_p^2}{r_p^2 - r_a^2})$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{v}_a^2 = \mathbb{GM}(\frac{r_p - r_a}{r_a r_p})(\frac{r_p^2}{r_p^2 - r_a^2})$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{v}_a^2 = \mathbb{GM}\frac{r_p}{r_a(r_p + r_a)}$
A partir de la geometría de una elipse $2a = r_p + r_a$; donde a es la longitud del semieje mayor
$\varepsilon = \frac{\overrightarrow{v}_a^2}{2} - \frac{\mathbb{GM}}{r_a} = \mathbb{GM}(\frac{2a - r_a}{r_a(2a)})$
$\varepsilon = \mathbb{GM}(\frac{2a - r_a}{2ar_a} - \frac{1}{r_a}) = -\frac{\mathbb{GM}}{2a}$
Esto en la primera ecuación:
$\frac{\overrightarrow{v}^2}{2} - \frac{\mathbb{GM}}{r} = -\frac{\mathbb{GM}}{2a}$
$\Rightarrow \overrightarrow{v}^2 = \mathbb{GM}(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$

8. Halle las ecuaciones intrínsecas de la curva regular ς, descrita por la transformación $\overrightarrow{r} : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{r}\theta = (a\theta - asen\theta; a - acos\theta)$, $a > 0$.
SOLUCIÓN
$\overrightarrow{r} = (a\theta - asen\theta; a - acos\theta)$
$(\overrightarrow{r})' = (a - acos\theta; asen\theta)$
$(\overrightarrow{r})'' = (asen\theta; acos\theta)$
$(\overrightarrow{r})''' = (acos\theta; -asen\theta)$



$k=\dfrac{\|(\overrightarrow{r})\times((\overrightarrow{r})''\|}{(\|(r)'\|)^3}$
Reemplazando:
$k=\dfrac{a^2cos\theta-a^2}{a^3(-2cos\theta-2)^{3/2}}$
$\Rightarrow k=\dfrac{cos\theta-1}{a\sqrt{(-2cos\theta-2)^3}}$
Ahora: $\tau=\dfrac{(\overrightarrow{r}\times(\overrightarrow{r})'').(r)'''}{\|(\overrightarrow{r}\times(\overrightarrow{r})''\|)^2}$
$\tau=\dfrac{(0;0;a^2cos\theta-a^2).(acos\theta;-asen\theta;0)}{(\|(\overrightarrow{r})'\times(\overrightarrow{r})''\|)^2}$
$\tau=\dfrac{0+0+0}{\|(\overrightarrow{r})'\times(\overrightarrow{r})''\|)^2}$
$\Rightarrow\tau=0$
Reparametrizando:
$s=\int_0^\theta\sqrt{(x')^2+(y')^2}\cdot d\theta$
$s=\int_0^\theta\sqrt{(a)^2(1-cos\theta)^2+(a^2(sen\theta)^2)}\cdot d\theta$
$s=-4acos(\dfrac{\theta}{2})+4a$
$\Rightarrow\theta=\dfrac{2arccos(4a-s)}{4a}$
$\Rightarrow k=\dfrac{cos\theta-1}{a\sqrt{(-2cos\theta-2)^3}}\quad y\quad\tau=0;\qquad\theta=\dfrac{2arccos(4a-s)}{4a}$

9. Sea ς la curva suave cerrada convexa y plana descrita por $\overrightarrow{\alpha}(s),\in[0;l]$ orientada positivamente. La curva suave ς_1 descrita por $\overrightarrow{\beta}(s)=\overrightarrow{\alpha}(s)-\mu\overrightarrow{N}(s)$ es el vector normal, se denomina una curva paralela a $\overrightarrow{\alpha}(s)$. Calcule la curvatura de la curva suave ς_1.
SOLUCIÓN
$\varsigma:\overrightarrow{r}(s)\qquad\qquad\overrightarrow{r}^*(s_1)=\overrightarrow{r}(s)-u\overrightarrow{n}(s)$
$(\overrightarrow{r}^*)'(s_1)=(\overrightarrow{r})'(s)-u(\overrightarrow{n})'$
$\overrightarrow{t}^*=[\overrightarrow{t}(s)-u(-k\overrightarrow{t}-\tau\overrightarrow{b})]\dfrac{ds}{ds_1}$ ...(1)
Pero como $\overrightarrow{r}(s)//\overrightarrow{r}^*(s_1)$
$[\overrightarrow{t}(s)-u(-k\overrightarrow{t}+\tau\overrightarrow{b})]\overrightarrow{t}(s)=1$
$\Rightarrow\dfrac{ds}{ds_1}=\dfrac{1}{1+uk}$ ...(2)
(2) en (1)

$$\overrightarrow{t}^*(s_1) = \frac{\overrightarrow{t}}{1+uk} + \frac{uk\overrightarrow{t} - u\tau\overrightarrow{b}}{1+uk}$$
$$\overrightarrow{t}^*(s_1) = \overrightarrow{t} - \frac{u\tau\overrightarrow{b}}{1+uk}$$
$$(tj(s_1))' = [(\overrightarrow{t})' - ((\overrightarrow{b})'\frac{u\tau}{1+uk} + \overrightarrow{b}(\frac{u\tau}{1+uk})')]\frac{ds}{ds_1}$$
$$k^*\overrightarrow{n}^* = [k\overrightarrow{k} - \tau\overrightarrow{n}(\frac{u\tau}{1+uk} - \overrightarrow{b}(\frac{u\tau}{1+uk})']\frac{1}{1+uk}$$
$$k^* = (k - \frac{u\tau^2}{1+uk} - 0)\frac{1}{1+uk}$$
$$k^* = \frac{k}{1+uk} - \frac{u\tau^2}{(1+uk)^2}$$
$$\overrightarrow{k}^*(s) = \frac{k + uk^2 - u\tau^2}{(1+uk)^2}$$

10. Encuentre la curvatura y el centro de curvatura de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4 = 0$ en el punto $(0;1)$.
SOLUCIÓN

Parametrizamos la curva, hacemos x=t

$$t^2 - 2ty + y^2 - t + 3y - 4 = 0$$
$$y^2 + (3-2t)y + t^2 - t - 4 = 0$$
$$y = \frac{-(3-2t) \pm \sqrt{(3-2t)^2 - 4(1)(t^2-4-t)}}{2}$$
$$y = \frac{2t - 3 \pm \sqrt{25-8t}}{2}$$ Para t=0 $\rightarrow x = 0, y = 0$

El valor que satisface es:
$$y = \frac{2t - 3 + \sqrt{25-8t}}{2}$$
Ahora tenemos:
$$\overrightarrow{r}(t) = (x,y) = (t; \frac{2t-3+\sqrt{25-8t}}{3})$$ Derivando:
$$r'(t) = (1; \frac{\sqrt{25-8t}-2}{\sqrt{25-8t}}) \; ; \qquad r''(t) = (0; \frac{-8}{\sqrt{(25-8t)^3}})$$
Para t=0;
$$r' = (1; \frac{23}{5}) \; ; \qquad r''(t) = (0; \frac{-8}{125})$$
Sabemos:
$$k = \frac{\|r' \times r''\|}{(\|r'\|)^3} = \frac{\|(1;23/5) \times (0;-8/125)\|}{\|(1;23/5)^3\|}$$
$$k = \frac{\frac{8}{125}}{(\frac{554}{25})^{3/2}} \qquad \rightarrow k = 6{,}135 \times 10^{-4}$$
Sabemos $r' = \|\overrightarrow{r}\|.\overrightarrow{r}$
$$\overrightarrow{T} = \frac{(1; \frac{\sqrt{25-8t}-2}{\sqrt{25-8t}}}{\sqrt{\frac{2(\sqrt{25-8t}+8t-27}{8t-25}}}$$
$$\overrightarrow{T} = (\frac{\sqrt{8t-25}}{\sqrt{2(2\sqrt{25-8t}+8t-27}}; \frac{\sqrt{8t-35}(\sqrt{25-8t}-2)}{\sqrt{25-8t}(\sqrt{2(2\sqrt{8t-35}+8t-27)}})$$

$$\overrightarrow{N} = (\frac{-(\sqrt{8t-25})(\sqrt{25-8t}-2)}{(\sqrt{25-8t})(\sqrt{2(2\sqrt{25-8t}+8t-27)}}; \frac{\sqrt{8t-25}}{\sqrt{2(2\sqrt{25-8t}+8t-27)}})$$

Para t=0 $\rightarrow N = (-\frac{15}{34}; \frac{25}{34})$

$C = \overrightarrow{r} + \rho.\overrightarrow{N}$

Sabemos que: $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{6{,}135 * 10^{-4}} = 1{,}62 * 10^3$

$C = (0; 1) + 1{,}63 * 103(\frac{-15}{34}; \frac{25}{34})$

$\Rightarrow C = (714{,}7; 1192{,}17)$